

文章编号: 1000-8055(2004) 01-0007-05

类似系统可靠性信息在复杂系统 Bayes 可靠性评估中的应用

刘 琦, 冯 静, 周经伦
(国防科技大学 系统工程研究所, 湖南 长沙 410073)

摘要: 先验分布的确定是运用 Bayes 方法进行复杂系统可靠性评估的先决条件。本文研究了利用类似系统的可靠性信息通过加权融合确定先验分布的方法。对 Weibull 和指数分布模型的可靠性试验结果, 给出 Bayes 方法可靠性计算公式。最后给出的一个实例表明, 该方法计算简便、便于工程应用。

关键词: 航空、航天推进系统; Bayes 分析; 可靠性评估; 加权因子; 超参数
中图分类号: O213.2 文献标识码: A

Application of Similar System Reliability Information to Complex System Bayesian Reliability Evaluation

LIU Qi, FENG Jing, ZHOU Jing-lun

(National University of Defence Technology, Changsha 410073, China)

Abstract: How to acquire proper prior distribution is a key problem in complex system Bayesian reliability evaluation. In this paper, the application of similar system reliability information to system reliability evaluation is studied. By weighting factor, similar system's information was converted to the prior information of a new system. The reliability test data based on Weibull and exponential distribution model is analysed, and reliability evaluation formula is presented. Finally an example is given to show this method is simple in computation and usable in application.

Key words: aerospace propulsion system; Bayesian analysis; reliability evaluation; weighting factor; super parameter

在复杂系统的可靠性评定中, 由于试验经费、时间、保密等原因, 每次试验的样本量较小, 所以利用经典统计方法很难对系统的可靠性参数给出精确估计。Bayes 方法^[1]能把工程技术人员对产品的了解、经验、类似产品的可靠性信息以及产品在研制中的数据相结合, 对产品质量进行综合评定, 而经典方法不能把人们对产品的已有认识渗透到评定体系中去。因此人们对 Bayes 方法逐渐重视, 并加以利用。但在 Bayes 方法系统可靠性评估中,

若选择的先验信息不合理或不可靠, 可靠性评估的结果可能不正确或带来恶果, 所以先验分布的确定是 Bayes 方法应用的关键。

在复杂系统的设计、生产过程中, 新系统通常是从已有的系统或类似系统中通过改进一定的功能、修改部分设计等变化而来, 因此在复杂系统的可靠性评估过程中, 可选择类似系统(产品)的试验信息及其可靠性分析结果, 进行一定的处理后作为新系统可靠性参数的先验信息。得出可靠性

收稿日期: 2003- 03- 06; 修订日期: 2003- 05- 30

作者简介: 刘琦(1974-), 男, 山西运城人, 国防科技大学系统工程研究所博士生, 主要从事小子样复杂系统的可靠性分析、可靠性工程与质量管理研究。

参数的先验信息后,运用 Bayes 方法^[2]结合少量的试验数据即可对系统的可靠性参数做出比较客观的估计。

本文着重介绍在评估复杂系统任务时间时的可靠度时,利用类似系统可靠性信息的过程。在文中用 Beta 分布^[1]作为新系统任务可靠度的先验分布,给出利用类似系统信息求解 Beta 分布超参数的方法。在文中通过一个实例说明了该方法的有效性。

1 系统任务可靠性先验分布的获取

在本文中用到的符号说明如下:

N ——类似系统个数;

A_i ——第 i 个类似系统;

A ——要进行可靠性评估的新系统;

R ——系统 A 在任务时间 t_0 的可靠度;

R_{i1}, R_{i2} ——系统 A_i 在任务时间 t_0 的可靠性特征量;

R_{α} ——系统 A_i 在任务时间 t_0 的可靠度;

T_i, S_i ——与系统 A_i 的可靠性特征量等效的 Beta 分布的投试和成功的产品个数;

T, S —— A 的可靠度 R 的先验分布的超参数;

W_i ——权重因子,表示 A_i 相对于 A 的相似程度。

考虑 N 个类似系统,系统 $A_i (i=1, \dots, N)$ 经过寿试以及现场使用试验后可以得出其可靠性特征量 R_{i1}, R_{i2} 的取值(例如, R_{i1} 表示 A_i 的 50% 的可靠度置信下限, R_{i2} 表示 95% 的可靠度置信下限;或者 R_{i1}, R_{i2} 分别为以任务时间为截尾时间的系统等效试验次数和成功次数),若进一步假设 A_i 在任务时间 t_0 的可靠度 R_{0i} 服从 Beta 分布 $B(R_{0i}; T_i, S_i)$,则可计算出 Beta 分布的参数^[3] T_i, S_i 。

对于系统 A ,可由它的 N 个类似系统的试验信息或者相应的 Beta 分布,构造出可靠度的先验分布 $B(R; T, S)$ 。定义 W_i 为系统 A 对新系统的加权因子,表示 A_i 的试验结果相应于 A 进行试验的相似程度。

Bayes 方法运用中,主要的困难就在于加权因子 W_i 的确定。可以通过专家信息等途径确定出系统间的加权因子,文献[4]给出如下的公式确定 W_i :

$$W_i = \frac{\sum \lambda_{0i}}{\sum \lambda_{0i} + \frac{1}{2} \sum \lambda_0 + \frac{1}{2} \sum \lambda} \quad (1)$$

在公式(1)所给出的加权因子下,得出新系统 Beta 先验分布的超参数(T, S)为:

$$T = \sum_{i=1}^N W_i T_i, \quad S = \sum_{i=1}^N W_i S_i \quad (2)$$

其中:

$\sum \lambda_{0i}$ —— A 和 A_i 所共有的部件的失效率估计值之和;

$\sum \lambda_0$ —— A 中有而 A_i 中没有的部件的失效率估计值之和;

$\sum \lambda$ —— A_i 中有而 A 中没有的部件的失效率估计值之和。

该方法确定 A 的可靠度的先验分布时虽然具有一定的精度,但通常情况下系统的可靠性是不断增长的,而该方法确定的先验分布评估系统可靠性时其结果偏于保守,例如当 $N=1$ 时,此时 $T = W_1 T_1, S = W_1 S_1$,由先验分布的期望得出可靠度的点估计为: $\hat{R} = S/T = W_1 S_1 / S_1 T_1$,与 A_1 的可靠度点估计一致,这样在选择(2)所得出的 T, S 作为先验分布的超参数,运用 Bayes 方法估计 A 的可靠度时,其结果是 A 的可靠性评估的结果趋于 A_1 的可靠性估计结果,使得新系统可靠性评估的结果偏于保守。其次对于复杂系统,例如火箭发动机,其部件的单独试验数据较少,因此 $\sum \lambda_{0i}$ 的确定比较困难。另外(1)所给出的加权因子仅适合于指数寿命单元所组成的串联系统,适用范围较小。

因此,基于复杂大系统,尤其是武器系统多为串联结构的特点,本文给出如下的加权因子:

$$W_i = \exp \left[\int_0^{t_0} \left(\sum \lambda(t) - \sum \lambda_0(t) \right) dt \right] \quad (3)$$

其中:

$\sum \lambda_0(t)$ —— A 中有而 A_i 中没有的部件在 t 时刻的失效率估计值之和;

$\sum \lambda(t)$ —— A_i 中有而 A 中没有的部件在 t 时刻的失效率估计值之和。

考虑到系统的研制过程中,通常情况下系统的可靠性是不断增长的,对于可靠性试验而言,即在与类似系统同样的投试样本下,试验的成功次数增多,所以选择对成功次数 S_i 加权,得出新系统试验前的等效试验次数和成功次数如下:

$$T = \sum_{i=1}^N T_i, \quad S = \sum_{i=1}^N W_i S_i \quad (4)$$

比较公式(1)与(3)可以发现:在公式(3)中仅考虑了 A_i 与 A 中不同部件的可靠性参数 $\sum \lambda(t)$ 和 $\sum \lambda_0(t)$, 而对于两者共有的部分不加考虑, 这就较容易分析复杂系统部件信息难以获取的情况; 公式(3)中给出的公式适用于任意寿命分布类型单元组成的串联系统; 公式(3)的 W_i 与 A_i 在任务时间 t_0 的可靠度 R_{0i} 之积即为 A 在任务时间 t_0 的可靠度, 因此可以得出公式(4)中 S/T 为 A 在任务时间 t_0 的可靠度点估计, 这样用公式(4)中的 T, S 作为先验分布超参数进行系统可靠性评估时, 其评估结果就更为客观。

特别地, 当系统中部件的寿命服从指数分布时 $\sum \lambda(t) = \sum \lambda$, $\sum \lambda_0(t) = \sum \lambda_0$ 为常值, 公式(3)就更容易计算。此时:

$$W_i = \exp\left[\left(\sum \lambda_i - \sum \lambda_0\right)t_0\right] \quad (5)$$

而部件失效率的估计 $\sum \lambda(t)$, $\sum \lambda_0(t)$ 可以从多种途径获得, 例如内部筛选试验、供应商提供等等。得出 T, S 后, 即可得出 R 的先验分布:

$$\pi(R) = B(R; T, S) \quad (6)$$

2 系统鉴定试验和似然函数

假设在系统 A 的鉴定试验中, 其截尾时间共有 m 个, 分别为 $t_1, \dots, t_m$ 。定义 $N_i (i=1, \dots, m)$ 为鉴定试验中在 $t_i (i=1, \dots, m)$ 时刻所投入的样本量, $k_i (i=1, \dots, m)$ 为失效个数, 将鉴定试验的结果记为 Data, 则鉴定试验的似然函数为:

$$L(\text{Data} | R_1, \dots, R_m) = \prod_{i=1}^m (1 - R_i)^{k_i} R_i^{N_i - k_i} \quad (7)$$

其中: $R_i = R(t_i) (i=1, \dots, m)$ 为 A 在 t_i 时刻的可靠度, 系统的寿命分布通常取指数分布和 Weibull 分布两种形式。下面分别进行说明。

当系统的寿命分布为指数分布时, 公式(7)的似然函数可改写为:

$$L(\text{Data} | R) = \prod_{i=1}^m (1 - R^{(t_i/t_0)})^{k_i} R^{(N_i - k_i)(t_i/t_0)} \quad (8)$$

当系统的寿命分布 Weibull 分布时, 在 Weibull 分布形状参数 β 给定的条件下, 公式(7)的似然函数可改写为:

$$L(\text{Data} | R, \beta) = \prod_{i=1}^m (1 - R^{(t_i/t_0)^\beta})^{k_i} R^{(N_i - k_i)(t_i/t_0)^\beta} \quad (9)$$

当系统鉴定试验的失效时间已知时, 定义 $r = \sum_{i=1}^m k_i$ 为系统的失效次数, 记系统的 r 次失效的失效时间为 $\tau (j=1, 2, \dots, r)$, 则公式(8)、(9)所示的似然函数可分别改写为:

$$L(\text{Data} | R) = \left[\prod_{j=1}^r \left(-\frac{\ln R}{t_0} R^{(\tau_j/t_0)} \right) \right] \left[\prod_{i=1}^m R^{(N_i - k_i)(t_i/t_0)} \right] \quad (10)$$

$$L(\text{Data} | R, \beta) = \left\{ \prod_{j=1}^r \left[-\frac{\beta}{\tau_j} \left(\frac{\tau_j}{t_0} \right)^\beta R^{(\tau_j/t_0)^\beta} \ln R \right] \right\} \times \left[\prod_{i=1}^m R^{(N_i - k_i)(t_i/t_0)^\beta} \right] \quad (11)$$

3 新产品可靠性的后验推断

公式(9)、(11)所给出的似然函数有两个未知参数 R 和 β , 所以需给出 R 和 β 的联合先验分布。为便于计算假设 R 和 β 相互独立, 则 R 和 β 的联合先验为其各自先验分布的乘积。

由(6)可得到 R 的先验分布, 若由专家信息等途径得出 β 的先验分布 $g(\beta)$, 则由 Bayes 公式得出如(14)所示的 R 和 β 的联合后验分布, 否则可选择如下两种形式之一作为 β 的先验分布^[2]。

(1) 无信息先验

在没有更多的其它信息可供利用的情况下, 定义:

$$g(\beta) \propto 1/\beta, \quad \beta \geq \beta_0 \quad (12)$$

(2) 均匀密度

当可以知道参数 β 的边界的时候, 可以假定:

$$g(\beta) = 1/(\beta^\beta - \beta^\beta) \left. \begin{array}{l} \beta_1 \leq \beta \leq \beta_2 \end{array} \right\} \quad (13)$$

由公式(12)、(13)以及(9)或(11), 可得到 R 和 β 的联合后验分布:

$$\pi(R, \beta | \text{Data}) = \frac{\pi(R; T, S) g(\beta) L(\text{Data} | R, \beta)}{\iint_{\Theta_R \times \Theta_\beta} \pi(R; T, S) g(\beta) L(\text{Data} | R, \beta) dR d\beta} \quad (14)$$

其中 Θ_R, Θ_β 分别为 R 和 β 的定义域。则 A 在任务时间 t_0 的可靠度 R 的分布为边缘分布:

$$\pi(R | \text{Data}) = \int_{\Theta_\beta} \pi(R, \beta | \text{Data}) d\beta \quad (15)$$

在公式(7)、(8)、(10)所示的似然函数下, 系

统可靠度的后验分布^[4]为:

$$\pi(R|\text{Data}) = \frac{\pi(R;T,S)L(\text{Data}|R)}{\int_{\Theta_R}\pi(R;T,S)L(\text{Data}|R)\text{d}R}$$

(16)

表 1 类似系统可靠性信息及相关参数计算结果

Table 1 The reliability information of similar system and calculated results of related parameters

<i>i</i>	点估计	置信水平	置信下限	$\sum \lambda_0(t) \times 10^{-7}/s$	$\sum \lambda_i(t) \times 10^{-7}/s$	<i>T_i</i>	<i>S_i</i>	<i>W_i</i>
1	0.9446	0.7	0.9364	0.001	0.017	52.32	49.42	1.007
2	0.9334	0.6	0.9331	0.009	0.028	61.54	57.44	1.0192
3	0.9609	0.8	0.9467	0.0105	0.0003	79.35	76.25	0.9899

运用公式(15)和(16)可计算得到系统*A*的可靠度的点估计(后验期望)、置信区间估计等^[1]。当鉴定试验无失效数据时,令*k_i*=0(*i*=1,⋯,*m*)代入公式(15)和(16)式计算即可。

由于公式(15)、(16)式解析计算比较复杂,积分困难,所以可采用数值算法进行计算。

4 举 例

设某系统*A*进行10⁸s的定时截尾试验,共投入10个样本,其中3个失效,失效时间分别为:0.2243×10⁸s,0.8267×10⁸s,0.0235×10⁸s,评估其任务时间*t*₀=10⁷s的可靠度。

已知和该系统类似的系统共有3个,且*A*和类似系统均为由指数分布单元组成的串联系统。通过对类似系统*A_i*(*i*=1,2,3)的分析,得出其在任务时间可靠度的点估计、给定置信水平下的可靠度置信下限估计,以及 $\sum \lambda_0(t)$ 和 $\sum \lambda_i(t)$,如表1所示。由类似系统可靠度的点估计和置信下限估计,通过查表^[3],得出类似系统的等效试验数*T_i*和成功次数*S_i*,由(5)计算出类似系统的加权因子*W_i*,计算结果如表1所示。

由(4)得出:

$$S = 49.42 \times 1.007 + 57.44 \times 1.0192 + 76.25 \times 0.9899 = 183.7887$$

$$T = 52.32 + 61.54 + 79.35 = 193.21$$

将试验数据以及*S*、*T*带入公式(6)、(16)得出可靠性的先验和后验分布,其图形如图1所示,通过运用Matlab计算得到可靠度的点估计(后验期望)为:0.9549,70%置信下限估计为:0.94924。

该系统的试验数据来自于失效率为0.467×

10⁻⁸/s的指数分布,经检验该方法的评估结果比经典方法更接近于实际的可靠度值。

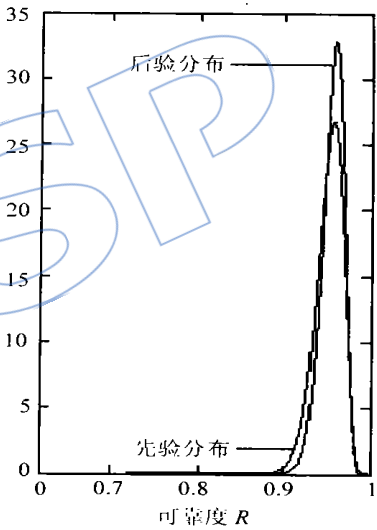


图 1 系统可靠度的先、后验分布

Fig. 1 The prior and posterior distribution of system reliability

5 结 论

在本文中,基于类似系统的可靠性信息,推导出系统任务可靠度的先验分布。这样结合少量的现场试验样本,运用Bayes方法即可对新系统的可靠性参数进行评定。该方法分析步骤明确,便于采用计算机编程实现。需要指出的是:

加权因子*W_i*的确定是该方法的基础,实际工程应用中,在部件可靠性信息较少的情况下,可由专家结合工程实际基于相关系统的可靠性水平,以及新系统的可靠性增长情况,直接给出加权因子。

得出任务可靠度 R_i 的后验分布后,即可以计算出可靠度的点估计、置信区间估计、置信下限估计等。

参考文献:

[1] 张金槐,唐雪梅. Bayes 方法[M]. 长沙: 国防科技大学出版社, 1990.

[2] James O Berger. Statistical Decision Theory and Bayesian Analysis (Second Edition) [M]. Springer-Verlag New York: Inc. , 1985.

[3] Martz H F, Waller R A. Bayesian Reliability Analysis[M]. John Wiley and Sons, 1982, 236– 237.

[4] Louis Hart. A Bayes Approach to Simultaneous Evaluation of Similar Assemblies [J]. IEEE Transactions on Reliability, 1989, 38(4) : 483– 484.